Varianta 58

Subiectul I

a) $\bar{z}=-1+i$. b) $x=0$ c) $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. d) $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $c=2, d=1$

f) *M(1,3)*

Subiectul II

1\. a) $a-b=2\in\mathbf{N}$ b) $\begin{vmatrix}7 & 4\\ 14 & 8\end{vmatrix}=0$. c) $\det A=0\Rightarrow \operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B;$ dacă

$\det B=0\Leftrightarrow a=1$. d) $(f\circ f)(1)=\frac{5}{2}$. e) Mulțimea A={1,2}

2\. a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n.=0$. b) $f'(x)=3x^2+1$. c) $f''(x)=-12x^2\le 0$.

d) f are un punct de extrem local (*x=2* punct de minim). e) $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln 3$.

Subiectul III

a) $A=\begin{pmatrix}a+ib & c+id\\ -c+id & a-ib\end{pmatrix}$. Avem *x=a, y=b ,z=c, t=d.*

b)

$\det A=\begin{vmatrix}a+ib & c+id\\ -c+id & a-ib\end{vmatrix}=(a^2+b^2)+(c+id)(c-id)=(a^2+b^2)+(c^2+d^2)=a^2+b^2+c^2+d^2.$

c) Dacă $\det A=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=0,\ a,b,c,d\in\mathbf{R}\Rightarrow a=b=c=d=0\Rightarrow A=O_2$

d) Calcul direct

e) Dacă $A\neq O_2$,având în vedere că $\det A=a^2+b^2+c^2+d^2=0\Leftrightarrow a=b=c=d=0$, rezultă că $\det A\neq 0$, deci matricea A este inversabilă.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}a-ib & -(c+id)\\ -(-c+id) & a+ib\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}a-ib & -c-id\\ c-id & a+ib\end{pmatrix};$$

f) $\left.\begin{matrix}A=aE+bI+cJ+dK\\ A'=a'E+b'I+c'J+d'K\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cdot A'=(aE+bI+cJ+dK)(a'E+b'I+c'J+d'K)=$

$$=aa'E^2+ab'EI+ac'EJ+ad'EK+ba'IE+bb'I^2+bc'IJ+bd'JK+ca'IE+cc'J^2+cb'JI+$$
$$+cd'JK+da'KE+db'KI+dc'KJ+dd'K^2=aa'E+ab'I+ac'J+ad'K+ba'I-bb'E+bc'K-$$

$-bd'J+ca'J-cc'E-cb'K+cd'I+da'K+db'J-dc'I-dd'E=(aa'-bb'-cc'-dd')E+$
$+(ab'+ba'+cd'-dc')I+(ac'-bd'+ca'+db')J+(ad'+bc'-cb'+da')K;$

g) $\det(A\cdot A')=\det A\cdot\det A' \quad (1)$
$\det A\cdot\det A'=(a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) \quad (2)$

Din a) şi f) avem
$A\cdot A'=$
$$\begin{pmatrix} aa'-bb'-cc'-dd'+i(ab'+ba'+cd'-dc') & ac'-bd'+ca'+db'+i(ad'+bc'-cb'+da') \\ -(ac'-bd'+ca'+db')+i(ad'+bc'-cb'+da') & aa'-bb'-cc'-dd'-i(ab'+ba'+cd'-dc') \end{pmatrix}$$
$\underset{b)}{\Rightarrow}\det(A\cdot A')=(aa'-bb'-cc'-dd')^2+(ab'+ba'+cd'-dc')^2+$
$+(ac'-bd'+ca'+db')^2+(ad'+bc'-cb'+da')^2 \quad (3).$

Din (1), (2), (3) rezultă relația cerută.

Subiectul IV

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ şi $|\sin x|\le 1, \forall x\in\mathbf{R}$,deci $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0.$

b) f_a este continuă pe $\mathbf{R}^*$. f_a este continuă în $x_0=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to} f_a(x)=f_a(0)$. Avem

$\lim\limits_{x\to 0} f_a(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ f_a(0)=a.$ Deci f_a este continuă în $x_0=0\Leftrightarrow a=1.$

c) Dacă $x\in\mathbf{R}^*$, atunci $f_a'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}, x\in\mathbf{R}^*.$

d) Funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$. Pentru ca f să fie derivabilă în $x_0=0$ este necesar ca f să fie continuă în $x_0=0$, deci a =1. Demonstram că în acest caz f este derivabilă în $x_0=0$. Funcția f este derivabilă în $x_0=0$ dacă există $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\in\mathbf{R}.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2x}=0\in\mathbf{R}.$$

e) $f_a'(x)=\frac{\cos x(x-tgx)}{x^2}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Dar $tgx>x, \forall x\in\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$, deci $f_a'(x)<0\Rightarrow$

$\Rightarrow f_a$ este descrescătoare $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f_a'(x) \geq f_a(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 1 \geq f_a(x) > \frac{2}{\pi}$.

f) Din e) avem $\frac{2}{\pi} \leq f_1(x), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)dx \Leftrightarrow 1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)dx$

Pe de altă parte $\forall\ x \in (0,1]$, $f_1(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^1 f_1(x)\,dx < \int\limits_0^1 1\,dx = 1$ şi $\forall\ x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\frac{\sin x}{x} \leq \sin x \quad \Rightarrow \quad \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\,dx = \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \cos 1$, aşadar

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\,dx = \int\limits_0^1 f_1(x)\,dx + \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\,dx < 1 + \cos 1$.

g) Vom calcula limita la dreapta în zero.

Din e) obținem că $f_1'(x) < 0$, $\forall\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci f_1 este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.Aşadar pentru $t \in [x, 2x] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $f_1(2x) \leq f_1(t) \leq f_1(x)$ şi $\frac{f_1(2x)}{t} \leq \frac{f_1(t)}{t} \leq \frac{f_1(x)}{t}$,de unde $f_1(2x) \cdot \int\limits_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \leq \int\limits_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t}\,dt \leq f_1(x) \cdot \int\limits_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \quad \Leftrightarrow$

$\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \ln 2 \leq \int\limits_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t}\,dt \leq \frac{\sin x}{x} \cdot \ln 2$ şi trecând la limită obținem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int\limits_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t}\,dt = \ln 2$.

Analog deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \int\limits_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t}\,dt = \ln 2$, deci $\lim\limits_{x\to 0} \int\limits_x^{2x} \frac{f_1(t)}{t}\,dt = \ln 2$.